

2.1 MONOTONIA – ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Η γνησίως αύξουσα

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού

της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

2.

Η γνησίως φθίνουσα

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού

της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

3.

Η γνησίως μονότονη

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως μονότονη** σε διάστημα Δ , όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .

4.

Η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$

- Όταν $a > 0$, τότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Όταν $a < 0$, τότε f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

5.

Το ελάχιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ελάχιστο** όταν :

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

6.

Το μέγιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **μέγιστο** όταν :

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

7.

Η άρτια

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Παρατήρηση. Η C_f μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

8.

Η περιττή

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Παρατήρηση. Η C_f μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Στη γραφική παράσταση.

f γνησίως αύξουσα σημαίνει ότι, αυξανόμενου του x αυξάνεται και το $f(x)$.

2.

Η γραφική παράσταση

γνησίως αύξουσας συνάρτησης σχεδιάζεται δεξιά και πάνω.

3.

Στη γραφική παράσταση.

f γνησίως φθίνουσα σημαίνει ότι, αυξανόμενου του x ελαττώνεται το $f(x)$.

4.

Η γραφική παράσταση

γνησίως φθίνουσας συνάρτησης σχεδιάζεται δεξιά και κάτω.

5.

Παρατήρηση

Αν f γνησίως μονότονη σε δύο διαστήματα, δε σημαίνει ότι είναι και στην ένωσή τους.

6.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι f γνησίως αύξουσα :

Υποθέτουμε $x_1 < x_2$ και αποδεικνύουμε $f(x_1) < f(x_2)$

7.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι f γνησίως φθίνουσα :

Υποθέτουμε $x_1 < x_2$ και αποδεικνύουμε $f(x_1) > f(x_2)$

8.

Ιδιότητα

- Αν $x_1, x_2 \in$ σε διάστημα Δ με $x_1 < x_2$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f(x_1) < f(x_2)$
- Αν $x_1, x_2 \in$ σε διάστημα Δ με $x_1 < x_2$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε $f(x_1) > f(x_2)$

9.

Οι αριθμοί x_0 και $f(x_0)$ στο ακρότατο

- Ο x_0 καθορίζει τη θέση του ακρότατου (ως προς το αριστερά – δεξιά)
- Ο $f(x_0)$ καθορίζει το πόσο πάνω ή κάτω συμβαίνει το ακρότατο.

10.

Η συμμετρικότητα του πεδίου ορισμού

Στην άρτια και στην περιττή συνάρτηση το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.

11.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή, αποδεικνύουμε ότι :

Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει **α)** $-x \in D_f$

β) $f(-x) = f(x)$ ή $f(-x) = -f(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

i) $f(x) = 3x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) $g(x) = -3x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$D_f = \mathbb{R}$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$

$$3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$$

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

ii)

$$D_g = \mathbb{R}$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2$

$$-3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

$$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}$$

* Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε με το «Θεωρία 4»

2.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x-1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$, άρα $D_f = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x_1 < x_2$

$$1 \leq 3x_1 < 3x_2$$

$$1 - 1 \leq 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$$

$$0 \leq 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$$

$$\sqrt{3x_1 - 1} < \sqrt{3x_2 - 1}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Μέθοδος 6

3.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-3x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $-3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$, άρα $D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

Έστω $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \leq -\frac{1}{3}$

Μέθοδος 7

$$3x_1 < 3x_2 \leq -1$$

$$3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \leq 0$$

$$-3x_1 - 1 > -3x_2 - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{3x_1-1} < \sqrt{3x_2-1}$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

4.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \leq 0$

Μέθοδος 7

$$x_1^2 > x_2^2$$

$$x_1^2 - 3 > x_2^2 - 3$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 < x_2$

Μέθοδος 6

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$x_1^2 - 3 < x_2^2 - 3$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 4]$.

i) Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας της ;

ii) Αποδείξτε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -2$ και μέγιστο στο $x_0' = 4$

iii) Βρείτε το $\min f(x)$ και το $\max f(x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η f είναι της μορφής $f(x) = ax + \beta$ με $a = 3 > 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-2, 4]$

ii)

$$x \in [-2, 4] \Rightarrow x \geq -2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(-2)$$

Άρα το $f(-2)$ είναι ελάχιστο

$$x \in [-2, 4] \Rightarrow x \leq 4 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) \leq f(4)$$

Άρα το $f(4)$ είναι μέγιστο

iii)

$$\min f(x) = f(-2) = 3(-2) - 1 = -7$$

$$\max f(x) = f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$$

Μέθοδος 8

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

i) Αποδείξτε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

ii) Αποδείξτε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$

iii) Βρείτε το $\min f(x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \leq 1$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0$$

$$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + 3 > (x_2 - 1)^2 + 3$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$

Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow 1 \leq x_1 < x_2$

$$0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + 3 < (x_2 - 1)^2 + 3$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

ii)

$$\text{Για } x \in (-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \xRightarrow{f \downarrow} f(x) \geq f(1) \quad (1)$$

Μέθοδος 8

$$\text{Για } x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(1) \quad (2)$$

Μέθοδος 8

Από τις (1), (2) $\Rightarrow f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα το $f(1)$ είναι ελάχιστο

iii)

$$\min f(x) = f(1) = (1 - 1)^2 + 3 = 3$$

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + 1$

i) Αποδείξτε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

ii) Αποδείξτε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$

iii) Βρείτε το $\min f(x)$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \text{Η συνάρτηση γράφεται } f(x) &= \begin{cases} -(x-2), & \text{αν } x-2 \leq 0 \\ x-2, & \text{αν } x-2 \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x \leq 2 \\ x-2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

i)

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \leq 2$

$$x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0$$

$$-x_1 + 2 > -x_2 + 2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow 2 \leq x_1 < x_2$

$$0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$

ii)

$$\text{Για } x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \xRightarrow{f \downarrow} f(x) \geq f(2) \quad (1)$$

Μέθοδος 8

$$\text{Για } x \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geq 2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(2) \quad (2)$$

Μέθοδος 8

Από τις (1), (2) $\Rightarrow f(x) \geq f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα το $f(2)$ είναι ελάχιστο

iii)

$$\min f(x) = f(2) = |2-2| + 1 = 1$$

8.Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού**ii)** Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και
γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ **iii)** Να αποδείξετε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$ **Προτεινόμενη λύση****i)**

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } 1 - x^2 \geq 0 & \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \\ |x| & \leq 1 \end{aligned}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{άρα } D_f = [-1, 1]$$

ii)

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in [-1, 0] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow -1 \leq x_1 < x_2 \leq 0$$

$$x_1^2 > x_2^2$$

$$-x_1^2 < -x_2^2$$

$$1 - x_1^2 < 1 - x_2^2$$

$$\sqrt{1 - x_1^2} < \sqrt{1 - x_2^2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\in [-1, 0]$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in [0, 1] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$$

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$-x_1^2 > -x_2^2$$

$$1 - x_1^2 > 1 - x_2^2$$

$$\sqrt{1 - x_1^2} > \sqrt{1 - x_2^2}$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\in [0, 1]$ **iii)**

$$\text{Έστω } x \in [-1, 1], \text{ τότε και } -x \in [-1, 1]$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \leq f(0)$

$$\sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{1 - 0^2}$$

$$1 - x^2 \leq 1$$

$$-x^2 \leq 0 \text{ που ισχύει}$$

9.

Συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι i) $f(0) = 0$

ii) f περιττή

Προτεινόμενη λύση

i)

Η (1), για $\alpha = \beta = 0$ γίνεται $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$

$$f(0) = 2f(0)$$

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

ii)

Έστω τυχαίο $x \in \mathbb{R}$, τότε και $-x \in \mathbb{R}$

Η (1), για $\alpha = x$ και $\beta = -x$ γίνεται $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(0) = f(x) + f(-x) \xrightarrow{(2)}$$

$$0 = f(x) + f(-x)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{άρα } f \text{ περιττή}$$

10.

Συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) - f(\beta) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι i) $f(0) = 0$

ii) f άρτια

Προτεινόμενη λύση

i)

Η (1), για $\alpha = \beta = 0$ γίνεται $f(0 + 0) = f(0) - f(0)$

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

ii)

Έστω τυχαίο $x \in \mathbb{R}$, τότε και $-x \in \mathbb{R}$

Η (1), για $\alpha = x$ και $\beta = -x$ γίνεται $f(x + (-x)) = f(x) - f(-x)$

$$f(0) = f(x) - f(-x) \xrightarrow{(2)}$$

$$0 = f(x) - f(-x)$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{άρα } f \text{ άρτια}$$